Πρόταση: Αν (X,ρ), (Y,d) είναι δύο μ.χ. και $f: X \to Y$ ομοιόμορφα συνεχής, τότε αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στο X, τότε η $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία στο Y.

Απόδειξη: Έστω $\varepsilon > 0$
Εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$, ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\rho(x,y) < \delta$ τότε $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$
Εφόσον η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, m \geq n_0$ να ισχύει $\rho(x_n, x_m) < \delta$ και άρα $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$

Άρα, η $f((x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Πρόταση: Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μ.χ. και $f: X \to Y$ μια συνάρτηση, η οποία απεικονίζει βασικές ακολουθίες του X σε βασικές ακολουθίες του Y. [Δηλ. αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στο X τότε το $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική στον Y].
Τότε η f είναι συνεχής. Αν επιπλέον ισχύει ότι κάθε ακολουθία του X είναι βασική υπακολουθία, τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Απόδειξη: Για ν.δ.ο. η f είναι συνεχής αρκεί (αρχή μεταφοράς) ν.δ.ο. για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X & $x \in X$ αν $x_n \to x$, τότε $f(x_n) \to f(x)$.
Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X με $x_n \to x$
Τότε η ακολουθία

$$\begin{array}{cccccc} x_1, & x, & x_2, & x, & x_3, & x \\ \| & \| & \| & \| & \| & \| \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & y_5, & y_6 \end{array}$$

Δηλ. $y_n = \begin{cases} x, & n \text{ άρτιος} \\ x_{\frac{n+1}{2}}, & n \text{ περιττός} \end{cases}$ 1

(Η (y_n) είναι βασική είναι συγκλίνουσα
διότι η (y_{2n}), ... (y_{2n-1}) συγκλίνουν στο ίδιο όριο)

Εφόσον η $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική από την υπόθεση η $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική. Η $(f(y_{2n}))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η σταθερή ακολουθία με όρους $f(x)$.

Άρα $f(y_{2n}) \to f(y)$

Συνεπώς $f(y_n) \to f(x)$.

(διότι αν μια ακολουθία είναι βασική και έχει υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα σημείο, τότε η ίδια συγκλίνει στο σημείο αυτό)

Συνεπώς, $f(y_{2n-1}) \to f(x)$, δηλ. $f(x_n) \to f(x)$

Επομένως, η f είναι συνεχής.

Έστω τώρα ότι ο (X,ρ) ικανοποιεί την επιπλέον υπόθεση ότι κάθε ακολουθία στο X έχει βασική υπακολουθία.

Θ.δ.ο. η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Αν αυτό δε συμβαίνει $\exists \varepsilon>0$ ώστε $\forall \delta>0$ $\exists x,y \in X$ με $\rho(x,y)<\delta$ και $d(f(x),f(y)) \geq \varepsilon$

Εφαρμόζοντας αυτό για $\delta=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε δύο ακολουθίες $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X ώστε $\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$ και $d(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$

Άρα $\rho(x_n,y_n) \to 0$ και $d(f(x_n),f(y_n)) \geq \varepsilon$ $\forall n$.

Από την υπόθεση η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει βασική υπακολουθία

Έστω $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ βασική υπακολουθία της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Εφόσον $\rho(x_{k_n},y_{k_n}) \to 0$ βλέπουμε άμεσα ότι η $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε ~~δηλ~~ την ακολουθία $(x_{k_1}, y_{k_1}, x_{k_2}, y_{k_2}, \dots)$
δηλ την ακολουθία (z_n) με $z_n = \begin{cases} x_{k_m}, & \text{αν } n \text{ περιττός } n=2m-1 \\ y_{k_m}, & \text{αν } n \text{ άρτιος } n=2m \end{cases}$

Η (z_n) όπως εύκολα βλέπουμε είναι βασική ακολουθία

Άρα, από υπόθεση η $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική.

$$d(f(z_{2n}), f(z_{2n-1})) = d(f(y_{kn}), f(x_{kn})) \geq \varepsilon$$

καταλήγουμε σε άτοπο.

Σημείωση: Δεν μπορούμε να συμπεράνουμε χωρίς την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

π.χ. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^2$ απεικονίζει βασικές ακολουθίες του $\mathbb{R}$ σε βασικές ακολουθίες (εφόσον ο $\mathbb{R}$ είναι πλήρης βασικές και συγκλίνουσες ταυτίζονται)

Η f όμως δεν είναι ομοιόμορφα συνεχής

Θεώρημα (Συστολής του Banach ή σταθερού σημείου του Banach):

Έστω (X,ρ) πλήρης μ.χ. και $f: X\to X$ μια συνάρτηση συστολής δηλ $\exists\, c<1$ ώστε $\rho(f(x), f(y)) < c\,\rho(x,y)$, $\forall x,y\in X$

Τότε η f έχει μοναδικό σταθερό σημείο [δηλ. υπάρχει μοναδικό $a\in X$ ώστε $f(a)=a$]

Απόδειξη: Μοναδικότητα: Αν $a, b \in X$ ώστε $f(a)=a$, $f(b)=b$

τότε $\rho(f(a), f(b)) < c\,\rho(a,b)$

$\rho(a,b) < c\,\rho(a,b)$

Εφόσον $c<1$ συμπεραίνουμε ότι $\rho(a,b)=0$ άρα $a=b$.

Ύπαρξη: Θεωρούμε τυχόν $x \in X$ και θεωρούμε την ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που ορίζεται αναδρομικά ως εξής

$x_1 = x, \quad \dots \quad x_{n+1} = f(x_n), \ \forall n \in \mathbb{N}$

[Δηλ. $x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x_1))) \dots$]

Ισχυρισμός: Η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι βασική ακολουθία.

Αποδ: Παρατηρούμε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$\rho(x_{n+1}, x_n) = \rho(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq c\,\rho(x_n, x_{n-1})$

Επαγωγικά, αποδεικνύεται ότι $\rho(x_{n+1}, x_n) < c^{n-1}\rho(f(x), x)$

Πράγματι:

→ Για $n=1$: $\rho(x_2, x_1) = \rho(f(x), x) = c^0 \rho(f(x), x)$

→ Αν $\rho(x_{n+1}, x_n) \leq c^{n-1}\rho(f(x), x)$ τότε

$\rho(x_{n+2}, x_{n+1}) \leq c\,\rho(x_{n+1}, x_n) \leq c \cdot c^{n-1}\rho(f(x), x) = c\,\rho(f(x), x)$

Συνεπώς, $\forall n, m \in \mathbb{N}$ με $m>n$: $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, x_{m-1}) + \rho(x_{m-1}, x_{m-2}) + \dots + \rho(x_{n+1}, x_n)$

$\leq c^{m-2}\rho(f(x), x) + c^{m-3}\rho(f(x), x) + \dots + c^{n-1}\rho(f(x), x)$

$\leq (c^{m-2} + c^{m-3} + \dots + c^{n-1})\, p(f(x), x)$

$\leq c^{n-1} \underbrace{(1 + c + \dots + c^{m-n-1})}_{\text{γεωμετρική σειρά}}\, p(f(x), x)$

$\leq c^{n-1} \dfrac{1}{1-c}\, p(f(x), x)$

Συμπεραίνουμε ότι η (x_n) είναι βασική.

Πράγματι, αν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall n \geq n_0$

$$c^{n-1} \cdot \frac{1}{1-c}\, p(f(x), x) < \varepsilon$$

και άρα $\forall m \geq n \geq n_0$ $p(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Εφόσον, ο (X, p) είναι πλήρης η $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι συγκλίνουσα δηλ. $\exists a \in X$ ώστε $x_n \to a$.

Εφόσον, η f ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz είναι συνεχής

άρα $f(x_n) \to f(a)$

δηλ. $x_{n+1} \to f(a)$

Όμως $x_n \to a$ άρα $x_{n+1} \to a$

Από μοναδικότητα ορίου $f(a) = a$

<u>Παρατηρήσεις</u>: α) Στην παραπάνω απόδειξη δεν παίζει ρόλο το αρχικό x που επιλέχθηκε (ήταν τυχαία η επιλογή)

β) Από την παραπάνω απόδειξη $\rho(x_m, x_n) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x), x)$

για $m > n$

Παίρνοντας όριο για $m \to \infty$:

$$\rho(x_n, a) = \rho(a, x_n) \leq \frac{c^{n-1}}{1-c}\rho(f(x_0), x)$$

γ) Αν αντί για $\rho(f(x), f(y)) \leq c\rho(x, y) \quad \forall x, y \in X$ όπου $c<1$ έχουμε την υπόθεση $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y) \; \forall x \neq y$

Τότε:

→ η f έχει το πολύ ένα σταθερό σημείο

→ Ενδέχεται η f να μην έχει σταθερό σημείο

Π.χ. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \log(1+e^x)$

Τότε $|f(x) - f(y)| < |x - y| \quad \forall x \neq y$

αλλά η f δεν έχει σταθερό σημείο

δ) Η υπόθεση της πληρότητας δεν μπορεί να παραληφθεί στο θεώρημα.

Π.χ. $f: (0,1) \to (0,1)$

$$f(x) = \frac{x}{2}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y| \quad \forall x, y \in (0,1)$$

αλλά η f δεν έχει σταθερό σημείο.